

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

PHẠM ĐÌNH NGUYỄN

PHÂN TÍCH TÍNH VÀ ĐỘNG LỰC HỌC PHI TUYẾN CỦA  
TẮM VÀ VỎ FG-CNTRC

Chuyên ngành: Cơ kỹ thuật

Mã số: 9520101.01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ CƠ KỸ THUẬT

Hà Nội - 2024



## MỞ ĐẦU

### Tính cấp thiết của đề tài

Vật liệu composite được gia cường ống nano carbon (CNT) có cơ tính biến đổi, đang trở thành một hướng nghiên cứu mới trong lĩnh vực cơ học với mục tiêu là tận dụng ưu điểm về độ bền, độ cứng cao, tính dẫn điện tốt của các ống CNT để tạo ra loại vật liệu nanocomposite có khả năng làm việc trong môi trường khắc nghiệt, đặc biệt quan trọng trong các ngành công nghiệp như hàng không, công nghiệp đóng tàu, kỹ thuật xây dựng, hạ tầng. . .

Trong kỹ thuật, tấm và vỏ là các cấu kiện cơ bản đóng vai trò quan trọng trong các kết cấu chịu tải, đặc biệt trong lĩnh vực cơ học vật liệu và kết cấu. Những kết cấu này thường phải hoạt động trong môi trường khắc nghiệt vì vậy việc nâng cao hiệu suất và thời gian làm việc của chúng là một bài toán quan trọng. Thay đổi thành phần vật liệu để tăng độ bền và độ cứng là một phương pháp hiệu quả để cải thiện khả năng làm việc của kết cấu.

Xuất phát từ những yêu cầu cấp thiết nhằm hiểu về ứng xử cơ học của các kết cấu gia cường ống nano carbon, luận án này tập trung vào bài toán “*Phân tích tĩnh và động lực học phi tuyến của tấm và vỏ FG-CNTRC*”.

### Mục tiêu nghiên cứu của luận án

- Xây dựng phương trình cân bằng và chuyển động dựa trên nguyên lý công ảo, Hamilton sử dụng các lý thuyết biến dạng cắt của Reddy và lý thuyết biến dạng cắt hình sin cho tấm và vỏ FG-CNTRC.

- **Bài toán tĩnh:** Phân tích mất ổn định của tấm, vỏ FG-CNTRC sử dụng phương pháp bán giải tích và mô phỏng số nhằm xác định tải tới hạn và mối liên hệ tải trọng - độ võng sau tới hạn.

- **Bài toán động:** Phân tích động lực học phi tuyến của tấm, vỏ FG-CNTRC nhằm xác định tần số riêng, mối liên hệ biên độ độ võng - tần số, độ võng - thời gian

### **Đối tượng và phạm vi nghiên cứu**

- **Đối tượng nghiên cứu:** Đối tượng nghiên cứu của luận án là tấm chữ nhật, vỏ hai độ cong và vỏ nón cụt FG-CNTRC.

- **Phạm vi nghiên cứu:** Bài toán tĩnh: Phân tích mất ổn định và sau mất ổn định. Bài toán động: Phân tích đáp ứng động lực học, dao động tự do và dao động cưỡng bức.

### **Phương pháp nghiên cứu**

- Phương pháp giải tích: Sử dụng các lý thuyết tấm vỏ (lý thuyết biến dạng cắt bậc 3, lý thuyết biến dạng cắt hình sin) xác định các chuyển vị và thiết lập trường biến dạng Von-Kármán biểu thị mối quan hệ phi tuyến giữa biến dạng và chuyển vị. Sử dụng nguyên lý công ảo hoặc nguyên lý Hamilton để xây dựng phương trình cân bằng hoặc chuyển động ở dạng đạo hàm riêng theo tọa độ và thời gian.

- Phương pháp bán giải tích: Sử dụng phương pháp hàm ứng suất Airy và phương pháp Galerkin để giải phương trình đạo hàm riêng với việc lựa chọn nghiệm của chuyển vị và hàm ứng suất thỏa mãn điều kiện biên. Đối với bài toán tĩnh, kết quả thu được là phương trình đại số biểu thị mối quan hệ giữa lực và chuyển vị để

phân tích mất ổn định của tấm vỏ FG-CNTRC. Đối với bài toán động, kết quả thu được là phương trình vi phân của chuyển vị theo thời gian được sử dụng để xác định tần số riêng trong phân tích dao động tự dao và áp dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 để thu được mối quan hệ giữa biên độ độ võng theo thời gian trong phân tích đáp ứng động lực học.

- Phương pháp mô phỏng: Xây dựng mô hình phần tử hữu hạn 3D trong phần mềm ABAQUS với chương trình con USDFLD viết trên FORTRAN để mô phỏng sự phân bố của các ống nano carbon có cơ tính biến đổi theo chiều dày áp dụng cho phân tích mất ổn định.

### **Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của luận án**

- *Ý nghĩa khoa học:* Hiện nay, nghiên cứu trong và ngoài nước liên quan tới bài toán mất ổn định, dao động riêng, và đáp ứng động lực học của tấm và vỏ FG-CNTRC sử dụng phương pháp giải tích, bán giải tích kết hợp với phương pháp mô phỏng số còn hạn chế. Luận án này trình bày một cách có hệ thống từ việc áp dụng, cải thiện các lý thuyết biến dạng cắt xác định chuyển vị, trường biến dạng phi tuyến Von-Kármán, xây dựng phương trình cân bằng, chuyển động ở dạng đạo hàm riêng của tọa độ và thời gian cho tới việc áp dụng phương pháp mô phỏng số, phương pháp Galerkin, Runge-Kutta để xác định tải trọng tới hạn, mối liên hệ tải trọng-độ võng và chuyển vị-thời gian trong phân tích mất ổn định và động lực học của tấm, vỏ FG-CNTRC.

- *Ý nghĩa thực tiễn:* Cung cấp các kết quả về giá trị tải tới hạn, biểu thức tải trọng và độ võng, tần số riêng, biên độ độ võng và thời

gian để hiểu rõ cách các kết cấu FG-CNTRC phản ứng dưới tác động của tải trọng tĩnh và động trong điều kiện thực tế. Điều này đóng góp vào việc cung cấp các giải pháp hỗ trợ trong quá trình thiết kế và chẩn đoán không phá hủy cũng như nâng cao hiệu suất của các kết cấu composite gia cường ống nano carbon có cơ tính biến thiên.

## **Bố cục của luận án**

- Mở đầu: Trình bày các vấn đề chung của luận án, ý nghĩa khoa học và thực tiễn, tóm tắt nội dung nghiên cứu và bố cục của luận án.

- Chương 1: Trình bày tổng quan các nội dung nghiên cứu về phân tích tĩnh và động lực học của tấm và vỏ FG-CNTRC.

- Chương 2: Trình bày tóm tắt các lý thuyết tấm vỏ, nguyên lý cơ bản xây dựng phương trình cân bằng và chuyển động, phương pháp giải bài toán, các khái niệm cơ bản, các mô hình vật liệu sử dụng trong luận án.

- Chương 3: Trình bày phân tích mất ổn định của tấm và vỏ FG-CNTRC nhằm xác định tải trọng tới hạn, biểu thức tải trọng-độ võng sau tới hạn.

- Chương 4: Trình bày kết quả phân tích động lực học xác định tần số dao động, mối quan hệ chuyển vị-thời gian, biên độ-tần số của vỏ hai độ cong và vỏ nón cụt FG-CNTRC.

- Kết luận và Hướng phát triển của luận án.

## **CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU**

### **1.1. Vật liệu composite và ống nano carbon**

Vật liệu composite là sự kết hợp giữa hai hoặc nhiều loại vật liệu có tính chất khác nhau, tận dụng những đặc tính riêng biệt của từng vật liệu thành phần. Việc tổ hợp chúng tạo ra một vật liệu mới với những đặc tính ưu việt hơn so với các thành phần ban đầu.

Ống nano carbon là một dạng thù hình của carbon, xuất phát từ những phân tử carbon với những đặc tính nổi bật như độ bền và độ cứng, khả năng dẫn điện và dẫn nhiệt hiệu quả. Ống nano carbon lần đầu tiên được phát hiện vào năm 1991 tại Nhật Bản do Tiến sĩ Sumio Iijima một nghiên cứu viên của công ty NEC tình cờ phát hiện qua kính hiển vi điện tử.

## **1.2. Tổng quan phân tích tấm FG-CNTRC**

Tấm là cấu kiện cơ bản có ứng dụng rộng rãi trong nhiều kết cấu kỹ thuật, thành phần quan trọng của các sản phẩm trong nhiều ngành công nghiệp như xây dựng, kiến trúc, hàng không. Để tránh việc hư hỏng của các kết cấu, việc phân tích tính chất cơ học của kết cấu là bài toán đặc biệt quan trọng để đánh giá về khả năng làm việc của kết cấu.

## **1.3. Tổng quan phân tích vỏ FG-CNTRC**

Vỏ là kết cấu được sử dụng nhiều trong các ứng dụng thực tế. Để nâng cao khả năng chịu tải cũng như độ bền và độ cứng của vỏ, nhiều học giả đã nghiên cứu ứng xử cơ học của vỏ gia cường ống nano carbon có cơ tính biến thiên.

## **1.4. Kết luận chung và xác định vấn đề nghiên cứu**

# **CHƯƠNG 2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT**

## **2.1. Các lý thuyết cơ bản**

Phần này trình bày các giả thiết của lý thuyết cổ điển, các lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, bậc ba và hình sin được áp dụng để xây dựng các phương trình cơ bản cho tấm và vỏ composite gia cường các ống nano carbon có cơ tính biến thiên.

## **2.2. Các nguyên lý cơ bản**

Trình bày nguyên lý công ảo, nguyên lý Hamilton, phương pháp Galerkin, Runge-Kutta áp dụng cho phân tích mất ổn định và đáp ứng động lực học của tấm và vỏ FG-CNTRC.

## **2.3. Các khái niệm cơ bản**

Trong phần này trình bày các khái niệm cơ bản trong bài toán phân tích mất ổn định tĩnh và động lực học của tấm và vỏ FG-CNTRC.

## **2.4. Các mô hình đồng nhất hóa FG-CNTRC**

Trình bày các mô hình xác định tính chất vật liệu composite gia cường ống nano carbon có cơ tính biến thiên.

## **2.5. Kết luận chương 2**

Các giả thiết của các lý thuyết tấm vỏ và phương pháp áp dụng cho phân tích mất ổn định và động lực học phi tuyến của tấm và vỏ FG-CNTRC đã được trình bày.

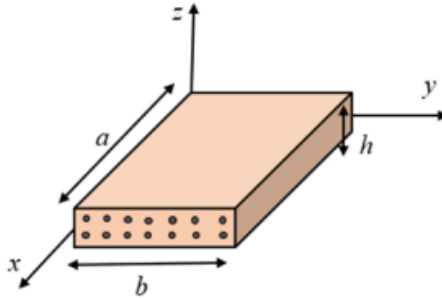
# **CHƯƠNG 3. PHÂN TÍCH MẤT ỔN ĐỊNH CỦA TẤM VÀ VỎ FG-CNTRC**



### 3.1. Phân tích mát ổn định của tấm FG-CNTRC

#### 3.1.1. Các phương trình cơ bản của tấm FG-CNTRC

Mô hình tấm FG-CNTRC có chiều dài  $a$ , chiều rộng  $b$  và chiều dày  $h$  được thể hiện trên Hình 3.1. Hệ trục tọa độ  $(x,y,z)$  với mặt phẳng  $(x,y)$  là mặt giữa của tấm và chiều  $z$  theo chiều dày của tấm.



**Hình 3.1:** Mô hình tấm FG-CNTRC

Trường biến dạng với tính phi tuyến hình học von Kármán được xác định như sau:

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + zk^1 + z^3k^3, \gamma = \gamma^0 + z^2k^2 \quad (3.3)$$

Định luật Hooke của tấm FG-CNTRC được xác định như sau:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} - \Delta T \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.5)$$

Áp dụng nguyên lý Hamilton [87] như sau:

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (3.6)$$

Các thành phần lực được biểu diễn qua hàm ứng suất Airy:

$$N_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, N_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, N_{xy} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (3.15)$$

### 3.1.2. Phương pháp bán giải tích

Phương trình tương thích biến dạng của tấm được viết lại theo hàm ứng suất như sau:

$$\begin{aligned} & A_{11}^* \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + A_{22}^* \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + (A_{66}^* - 2A_{12}^*) \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + (B_{11}^* - D_{11}^* c_1) \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x^3} \\ & + (D_{21}^* c_1 - D_{66}^* c_1 - B_{21}^* + B_{66}^*) \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial y^2} + \left( \begin{array}{l} -D_{12}^* c_1 - D_{66}^* c_1 \\ +B_{12}^* + B_{66}^* \end{array} \right) \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial x^2 \partial y} \\ & + (D_{22}^* c_1 - B_{22}^*) \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y^3} - D_{11}^* c_1 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + D_{22}^* c_1 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ & + (-D_{12}^* c_1 + D_{12}^* c_1 - 2D_{66}^* c_1) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} = \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Phương trình cân bằng viết theo hàm ứng suất được xác định như sau:

$$\begin{aligned} G_{11}(w_0) + G_{12}(\varphi_x) + G_{13}(\varphi_y) + G_{14}(f) + S(w_0, f) &= 0 \\ G_{21}(w_0) + G_{22}(\varphi_x) + G_{23}(\varphi_y) + G_{24}(f) &= 0 \\ G_{31}(w_0) + G_{32}(\varphi_x) + G_{33}(\varphi_y) + G_{34}(f) &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Điều kiện biên tựa đơn (SSSS) theo lý thuyết biến dạng cắt bậc 3 được xác định như sau:

Tại  $x = 0, a$ :

$$w_0 = v_0 = 0, w_{,x} = w_{,y} = 0, \phi_x = \phi_y = 0, N_{xy} = 0, N_x = N_{,x}$$

Tại  $y = 0, b$ : (3.19)

$$w_0 = u_0 = 0, w_{,x} = w_{,y} = 0, \phi_x = \phi_y = 0, N_{xy} = 0, N_y = N_{y0}$$

Nghiệm thỏa mãn điều kiện biên tựa đơn tìm được như sau:

$$\begin{bmatrix} w_0(x, y, t) \\ \phi_x(x, y, t) \\ \phi_y(x, y, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(t) \sin \alpha x \sin \beta y \\ \Phi_x(t) \cos \alpha x \sin \beta y \\ \Phi_y(t) \sin \alpha x \cos \beta y \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$f = F_0 + F_1 \cos 2\alpha x + F_2 \cos 2\beta y + F_3 \sin \alpha x \sin \beta y \quad (3.21)$$

Phương trình liên hệ giữa tải trọng nén dọc trục và độ võng được xác định như  $N_{x0} = -F_x h$ :

$$F_x = \frac{\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 \bar{W} + \bar{\sigma}_3 \bar{W}^2}{\bar{\sigma}_4} \quad (3.25)$$

Từ phương trình (3.25) với  $W \rightarrow 0$  thu được biểu thức tải mất ổn định như:

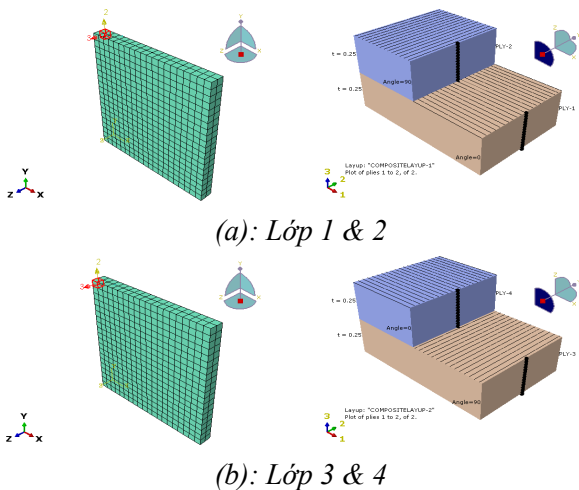
$$F_{mn} = \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_4} \quad (3.26)$$

Giá trị tải trọng tới hạn  $F_{cr}$  là giá trị nhỏ nhất của tải mất ổn định trong phương trình trên phụ thuộc vào sự thay đổi của mode mất ổn định  $(m, n)$ .

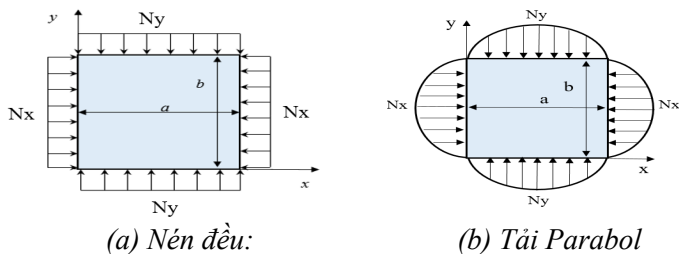
### 3.1.3. Phương pháp mô phỏng

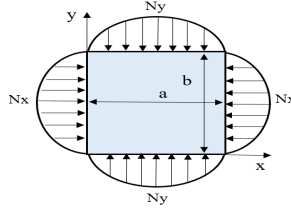
Xét tấm có chiều dài  $a$ , chiều rộng là  $b$  với kích thước  $a = b = 10$  và độ dày là  $h = 1$ , phần tử C3D8 (phần tử khối lập phương lục diện) chia thành 20 phần tử mỗi mặt và 2 phần tử dọc theo chiều dày, được rời rạc hóa với 1323 node. Mặt cắt của các phần tử khối được giả định được tạo thành từ hai lớp vật liệu, có độ dày bằng 0.25 và 15

điểm tích phân. Vật liệu tạo nên các lớp được coi là đàn hồi tuyến tính, với sự phân bố biến đổi chức năng của CNT theo chiều dày của tấm nhiều lớp. Sự phân bố này được xác định thông qua việc sử dụng chương trình con USDFLD với biến định nghĩa trong chương trình con USDFLD là tỉ lệ thể tích của CNT tương ứng với sự biến đổi của các đặc tính vật liệu theo chiều dày



**Hình 3.3:** Mô hình phần tử hữu hạn của tấm





(c) Tải hình sin:

**Hình 3.5:** Mô hình phân bố các loại tải trọng

### 3.1.4. Kết quả và thảo luận

#### 3.1.4.1. Kết quả so sánh

Trong phần này, các kết quả so sánh mô hình phần tử hữu hạn và phương pháp giải tích cho bài toán mất ổn định của tấm FG-CNTRC đơn lớp chịu tải parabol trong Bảng 3.1 cho hệ số tải trọng

$$\text{tới hạn } k_{cr} = \frac{\lambda_{cr} b^2}{(\pi^2 D_m)}, D_m = \frac{E_m h^3}{12(1 - \nu_{12}^2)}.$$

**Bảng 3.1:** Hệ số tải trọng tới hạn  $k_{cr}$  của tấm đơn lớp SSSS gia cường FG-CNT ( $b/h = 50, a = b = 1, V_{CNT}^* = 0.17.$ )

| Loại phân bố CNT | Tài liệu [58]       | Tài liệu [10]      | Luận án (FEM)      | Luận án (Giải tích) |
|------------------|---------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| UD               | 59.1919<br>(1.51%)* | 59.1758<br>(1.54%) | 60.3467<br>(0.41%) | 60.0992             |
| FG-X             | 84.3870<br>(2.31%)  | 84.3354<br>(2.37%) | 84.9354<br>(1.68%) | 86.3828             |
| FG-O             | 33.0091<br>(0.97%)  | 33.2042<br>(0.38%) | 33.9470<br>(1.84%) | 33.3321             |

\* giá trị sai khác (%) với kết quả của luận án (phương pháp giải tích).

#### 3.1.4.2. Kết quả phân tích mất ổn định

Bảng 3.5 so sánh hệ số tải tới hạn của các tấm FG-CNTRC nhiều lớp sử dụng phương pháp giải tích và phương pháp FEM. Mô

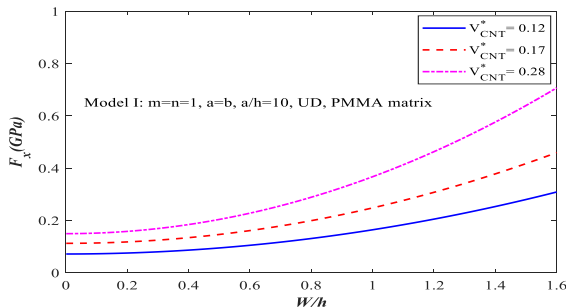
hình I được sử dụng cho trường hợp này với ba loại phân bố CNT. Có thể thấy rằng, sự sai khác nhiều nhất và ít nhất giữa hai phương pháp là khoảng 1.36(%) và 7.2(%).

**Bảng 3.5:** So sánh 3 mô hình cho hệ số tải trọng tới hạn  $k_{cr}$  của tấm SSSS FG-CNTRC chịu tải nén parabol 2 cạnh

| Loại CNT | FEM                |                    | Giải tích          |                    |
|----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
|          | $V_{CNT}^* = 0.12$ | $V_{CNT}^* = 0.28$ | $V_{CNT}^* = 0.12$ | $V_{CNT}^* = 0.28$ |
| UD       | 14.1040            | 30.5434            | 14.2984            | 29.8636            |
| FG-X     | 15.6972            | 33.9581            | 17.7611            | 36.5837            |
| FG-O     | 11.1700            | 24.1744            | 10.8193            | 23.0612            |

### 3.1.4.3. Kết quả phân tích sau tới hạn

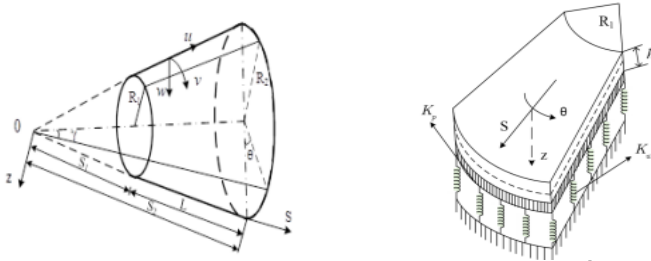
Hình 3.8 trình bày ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT gia cố hai loại nền polymer PMMA tới ứng xử sau tới hạn của tấm FG-CNTRC.



**Hình 3.8:** Ảnh hưởng tỉ lệ thể tích CNT tới đường cong tải trọng ( $F_x$ ) - tỉ lệ độ võng/ chiều dày ( $W/h$ ) của tấm PMMA

## 3.2. Phân tích mất ổn định của vỏ nón cụt FG-CNTRC

Xem xét một vỏ nón cụt FG-CNTRC được đặt trên nền đàn hồi với chiều dày của vỏ là  $h$  chiều dài  $L$  và góc ở nửa đỉnh của hình nón  $\gamma$  giới hạn bởi hai đường tròn với bán kính nhỏ  $R_1$  và bán kính lớn  $R_2$



(a). Mô hình vỏ nón cụt (b). Vỏ nón cụt trên nền đàn hồi  
**Hình 3.14:** Mô hình vỏ nón cụt trên nền đàn hồi

Phương trình cân bằng của vỏ nón cụt được xây dựng theo lý thuyết vỏ cổ điển với tính phi tuyến hình học như sau:

$$S \frac{\partial N_s}{\partial S} + \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial \varphi} + N_s - N_\theta = 0$$

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \varphi} + S \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial S} + 2N_{s\theta} = 0 \quad (3.32)$$

$$S \frac{\partial^2 M_s}{\partial S^2} + 2 \frac{\partial M_s}{\partial S} + 2 \left( \frac{\partial^2 M_{s\theta}}{\partial S \partial \varphi} + \frac{1}{S} \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{S} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial M_\theta}{\partial S}$$

$$- N_\theta \cot \gamma + \frac{\partial}{\partial S} \left( S N_s \frac{\partial w}{\partial S} + N_{s\theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( N_{s\theta} \frac{\partial w}{\partial S} + \frac{1}{S} N_\theta \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)$$

$$- SK_w w + SK_p \Delta w = 0$$

Sử dụng hàm ứng suất Airy  $F(s, \theta, t)$  như sau [100]:

$$N_s = \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial S}, N_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}, N_{s\theta} = -\frac{1}{S} \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial \varphi} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \quad (3.33)$$

Hệ phương trình cho biến  $F_1$  và  $w$  để phân tích mất ổn định tĩnh của vỏ nón cụt FG-CNTRC:

$$\begin{aligned} H_{11}(F_1) + H_{12}(w) + H_{13}(F_1, w) &= 0, \\ H_{21}(F_1) + H_{22}(w) + H_{23}(w, w) &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Điều kiện biên của vỏ được giả sử là tựa đơn các cạnh bên:

$$w = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = x_0. \quad (3.36)$$

Nghiệm thỏa mãn điều kiện biên của bài toán được xác định như sau [40]:

$$\begin{aligned} w &= fe^x \sin(m_1 x) \sin(m_2 \theta) + Gfe^x \sin^2(m_1 x); \\ m_1 &= \frac{m\pi}{x_0}, m_2 = \frac{n}{\sin \gamma}, x_0 = \ln \frac{S_2}{S_1} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Phương trình mối liên hệ tải dọc trục  $T$  và độ võng  $w$ :

$$T = -\frac{f^4 A^2 u_1 + f^2 A u_2 + f^2 u_3 + u_5}{u_4} \quad (3.45)$$

Tải mất ổn định được xác định từ phương trình (3.23) với  $f \rightarrow 0$  thu được biểu thức như sau:

$$T_{mn} = -\frac{u_5}{u_4} \quad (3.46)$$

Giá trị tải trọng tới hạn  $T_{cr}$  là giá trị nhỏ nhất của tải mất ổn định trong phương trình trên phụ thuộc vào sự thay đổi của mode mất ổn định  $(m, n)$ .

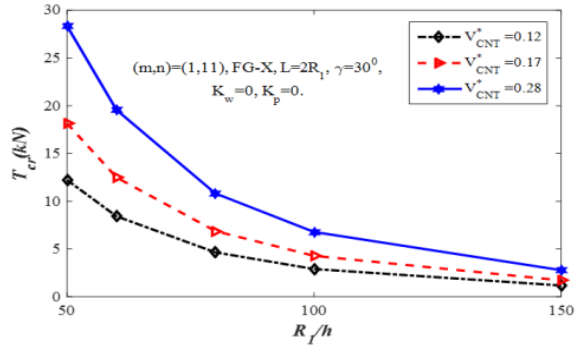
### 3.2.2. Kết quả và thảo luận

#### 3.2.2.1. Kết quả phân tích mất ổn định

Hình 3.8 trình bày ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT đến tải tới



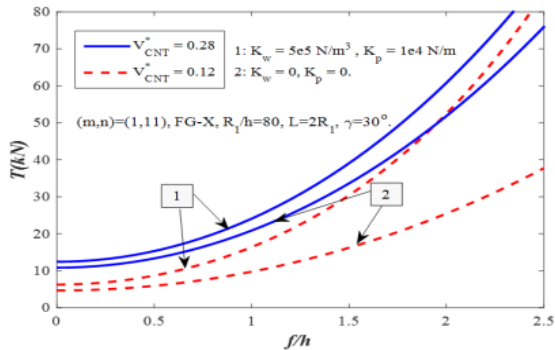
hạn của vỏ nón cụt gia cường theo kiểu phân bố biến đổi tuyến tính (FG-X) và phân bố đều (UD).



**Hình 3.15:** Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT tới tải trọng tới hạn của vỏ nón cụt FG-X

### 3.2.2.2. Kết quả phân tích sau tới hạn

Kết quả phân tích trạng thái sau tới hạn của vỏ nón cụt FG-CNTRC thể hiện qua mối liên hệ giữa lực và tỉ lệ biên độ độ võng/độ dày trình bày trong phần này.



**Hình 3.22:** Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích tới đường cong tải trọng - tỉ lệ độ võng/chiều dày của vỏ nón cụt FG-CNTRC đặt trên nền đàn hồi

### 3.3. Kết luận chương 3

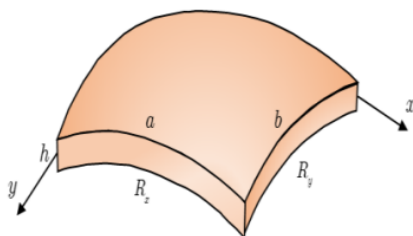
Sử dụng phương pháp bán giải tích và mô phỏng số để phân tích bài toán mất ổn định của tấm và vỏ gia cường FG-CNT. Đối với phương pháp bán giải tích, kết hợp phương pháp Galerkin, hàm ứng suất và cân bằng điều hòa để xác định nghiệm của bài toán và xác định phương trình phân tích mất ổn định của tấm và vỏ. Đối với phương pháp mô phỏng số, mô hình phần tử hữu hạn với hàm con USDFLD trong ABAQUS được thiết lập nhằm mô tả sự phân bố biến thiên theo chiều dày của các ống nano carbon, áp dụng phân tích mất ổn định của tấm FG-CNTRC.

## CHƯƠNG 4. PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC CỦA TẤM VÀ VỎ FG-CNTRC

### 4.1. Phân tích dao động và đáp ứng động lực học của vỏ hai độ cong FG-CNTRC

#### 4.1.1. Các phương trình cơ bản của vỏ hai độ cong FG-CNTRC

Mô hình vỏ hai độ cong với tổng chiều dày  $h$ , chiều dài  $a$  và chiều rộng  $b$  thể hiện trên Hình 4.1.



**Hình 4.1:** Mô hình vỏ hai độ cong

Lược án đề xuất lý thuyết biến dạng cắt hình sin với bốn bậc tự do. Trường chuyển vị được xác định như sau:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Trường biến dạng có xét tính phi tuyến hình học Von-Kármán:

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + zk^1 + f(z)k^3, \gamma = \gamma^0 + g(z)k^2 \quad (4.3)$$

Các phương trình chuyển động của vỏ hai độ cong FG-CNTRC được xây dựng dựa trên nguyên lý Hamilton như sau [87]:

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (4.6)$$

#### 4.1.2. Các điều kiện biên và nghiệm phương trình

##### **Trường hợp 1: Tựa đơn tất cả các cạnh (SSSS)**

Tại  $x = 0, a$ :

$$w_0 = v_0 = 0, w_{0,x} = w_{0,y} = 0, \phi_x = \phi_y = 0, N_{xy} = 0, N_x = N_{x0}$$

Tại  $y = 0, b$ :

$$w_0 = u_0 = 0, w_{0,x} = w_{0,y} = 0, \phi_x = \phi_y = 0, N_{xy} = 0, N_y = N_{y0} \quad (4.22)$$

Nghiệm thỏa mãn điều kiện biên tựa đơn tìm được như sau:

$$\begin{bmatrix} w(x, y, t) \\ \phi(x, y, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(t) \sin \lambda_m x \sin \delta_n y \\ \Phi(t) \sin \lambda_m x \sin \delta_n y \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

##### **Trường hợp 2: Ngàm tất cả các cạnh (CCCC)**

Tại  $x = 0, a; y = 0, b$

$$\begin{aligned} w_0 = u_0 = v_0 = 0, w_{0,x} = w_{0,y} = 0, \\ \phi_{,x} = \phi_{,y} = 0, N_{xy} = 0, N_x = N_{x0}, N_y = N_{y0} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Nghiệm thỏa mãn điều kiện biên tìm được như sau:

$$\begin{bmatrix} w(x, y, t) \\ \phi(x, y, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(t) \sin^2 \lambda_m x \sin^2 \delta_n y \\ \Phi(t) \sin^2 \lambda_m x \sin^2 \delta_n y \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

**Trường hợp 3: Hai cạnh đối diện tựa đơn, hai cạnh đối diện ngàm (CSCS)**

$$\text{Ngàm tại } x = 0, a: \begin{aligned} w_0 = u_0 = v_0 = 0, w_{0,x} = w_{0,y} = 0, \\ \phi_{,x} = \phi_{,y} = 0, N_{xy} = 0, N_x = N_{x0} \end{aligned}$$

$$\text{Tựa đơn tại } y = 0, b: \quad (4.28)$$

$$w_0 = u_0 = 0, w_{0,x} = w_{0,y} = 0, \phi_{,x} = \phi_{,y} = 0, N_{xy} = 0, N_y = N_{y0}$$

Nghiệm thỏa mãn điều kiện biên tìm được như sau:

$$\begin{bmatrix} w(x, y, t) \\ \phi(x, y, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(t) \sin^2 \lambda_m x \sin \delta_n y \\ \Phi(t) \sin^2 \lambda_m x \sin \delta_n y \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Tần số riêng được xác định bằng phương trình sau:

$$\begin{vmatrix} G_1^1 + \omega^2 J_1^{-1} & G_1^4 + \omega^2 J_1^{-2} \\ G_2^1 + \omega^2 J_2^{-1} & G_2^3 + \omega^2 J_2^{-2} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.35)$$

Phương trình phân tích đáp ứng động lực học:

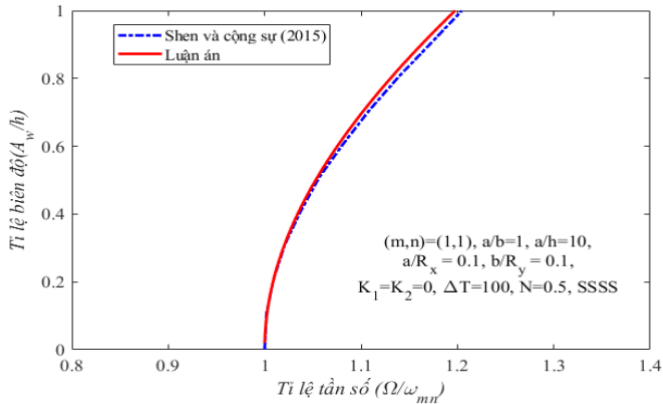
$$\begin{aligned} \bar{J}_1^{-1} \frac{d^2 W(t)}{dt^2} + \bar{J}_1^{-2} \frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} &= (G_1^1 + G_1^{11} N_{x_0} + G_1^{11} N_{y_0}) W(t) \\ &+ G_1^2 W(t)^2 + G_1^3 W(t)^3 + G_1^4 \Phi(t) + G_1^5 W(t) \Phi(t) \\ &+ G_1^6 \left( \frac{N_{x_0}}{R_x} + \frac{N_{y_0}}{R_y} + Q_0 \sin \Omega t \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\bar{J}_2^{-1} \frac{d^2 W(t)}{dt^2} + \bar{J}_2^{-2} \frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} = G_2^1 W(t) + G_2^2 W(t)^2 + G_2^3 \Phi(t) \quad (4.41)$$

#### 4.1.4. Kết quả và thảo luận

##### 4.1.4.1. Kết quả so sánh

Hình 4.2 trình bày so sánh đường cong mối quan hệ giữa tỉ lệ biên độ trên độ dày ( $A_w/h$ ) và tỉ lệ tần số ( $\Omega/\omega_{mn}$ ) của dao động tự do phi tuyến đối của vỏ hai độ cong FG-CNTRC với điều kiện biên SSSS.



**Hình 4.2:** So sánh đường cong  $A_w/h-\Omega/\omega_{mn}$  của tấm FG-CNTRC

#### 4.1.4.2. Dao động tự do

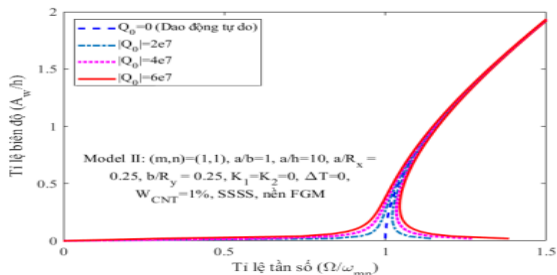
Bảng 4.10 so sánh tần số cơ bản không thứ nguyên của vỏ hai độ cong gia cường FG-CNT (Model I-b) với 3 điều kiện biên.

**Bảng 4.10:** Ảnh hưởng điều kiện biên BCs và các loại phân bố CNTs tới tần số không thứ nguyên của vỏ hai độ cong nền kim loại gia cường FG-CNTs (Model I-b: WCNT = 1%)

| BCs  | UD     | FG-O   | FG-X   |
|------|--------|--------|--------|
| SSSS | 0.0639 | 0.0610 | 0.0663 |
| CSCS | 0.0668 | 0.0641 | 0.0691 |
| CCCC | 0.0920 | 0.0888 | 0.0973 |

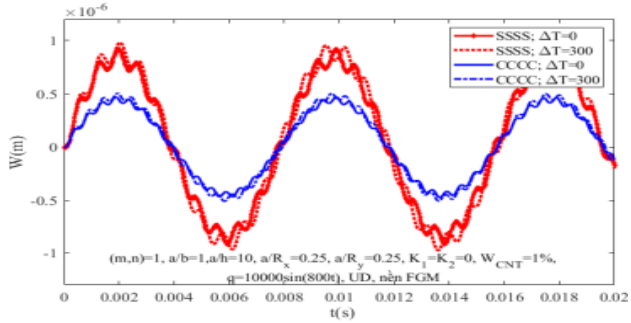
#### 4.1.4.3. Dao động cưỡng bức

Hình 4.6 thể hiện ảnh hưởng của biên độ ( $Q_0$ ) của ngoại lực tới tỉ lệ biên độ-tần số của dao động cưỡng bức phi tuyến của vỏ hai độ cong nền FGM gia cường UD-CNTs với các cạnh tựa đơn (SSSS) (Mô hình II)

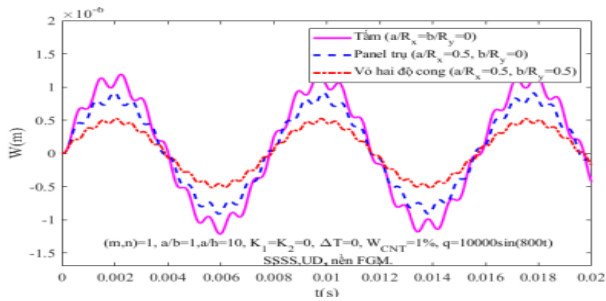


**Hình 4.6:** Ảnh hưởng của biên độ lực ngoài tới đường cong biên độ tần số của dao động phi tuyến cho vỏ hai độ cong (Model II)

#### 4.1.4.4. Đáp ứng động lực học



**Hình 4.11:** Ảnh hưởng của sự gia tăng nhiệt độ tới đáp ứng động lực học phi tuyến của vỏ hai độ cong nền FGM (Model II)



**Hình 4.14:** So sánh đường cong biên độ độ võng-thời gian cho tấm, panel trụ, và vỏ hai độ cong nền FGM (Model II)

#### 4.2. Phân tích dao động tự do và đáp ứng động lực học của vỏ nón cụt FG-CNTRC

Phương trình chuyển động của vỏ nón cụt FG -CNTRC được xây dựng dựa trên lý thuyết vỏ cổ điển [100]:

$$S \frac{\partial N_s}{\partial S} + \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial \varphi} + N_s - N_\theta = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial N_{\theta}}{\partial \varphi} + S \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial S} + 2N_{s\theta} = \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} & S \frac{\partial^2 M_s}{\partial S^2} + 2 \frac{\partial M_s}{\partial S} + 2 \left( \frac{\partial^2 M_{s\theta}}{\partial S \partial \varphi} + \frac{1}{S} \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{S} \frac{\partial^2 M_{\theta}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial M_{\theta}}{\partial S} \\ & - N_{\theta} \cot \gamma + \frac{\partial}{\partial S} \left( SN_s \frac{\partial w}{\partial S} + N_{s\theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( N_{s\theta} \frac{\partial w}{\partial S} + \frac{1}{S} N_{\theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\ & - SK_w w + SK_p \Delta w = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Hệ phương trình phân tích động lực học của vỏ nón cụt:

$$\begin{aligned} H_{11}(F_1) + H_{12}(w) + H_{13}(F_1, w) &= 0, \\ H_{21}(F_1) + H_{22}(w) + H_{23}(w, w) &= 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Điều kiện biên của vỏ được giả sử là tựa đơn các cạnh bên:

$$w = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = x_0 \quad (4.46)$$

Để hệ phương trình (14) với biến  $w$  và  $F_1$  và xem xét đến điều kiện biên nghiệm của bài toán được giả sử như sau [100]:

$$w = fe^x \sin(m_1 x) \sin(m_2 \theta) + Gfe^x \sin^2(m_1 x) \quad (4.47)$$

Phương trình nghiên cứu bài toán động của kết cấu vỏ nón được xác định như sau:

$$\begin{aligned} & u_1 f^4(t) \lambda^2 + u_2 f^2(t) \lambda + u_3 f^2(t) \\ & + u_5 f(t) + u_4 Q_0 \sin(\omega t) = u_{13} \frac{d^2}{dt^2} f(t) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Tần số riêng của vỏ nón cụt FG-CNT được xác định như sau:

$$\omega_L = \sqrt{-\frac{u_5}{u_{13}}} \quad (4.55)$$



#### 4.2.2. Kết quả và thảo luận

##### 4.2.2.1. Kết quả so sánh

**Bảng 4.15:** So sánh tần số tự nhiên không thứ nguyên của vỏ nón cụt đồng nhất ( $m = 1$ )

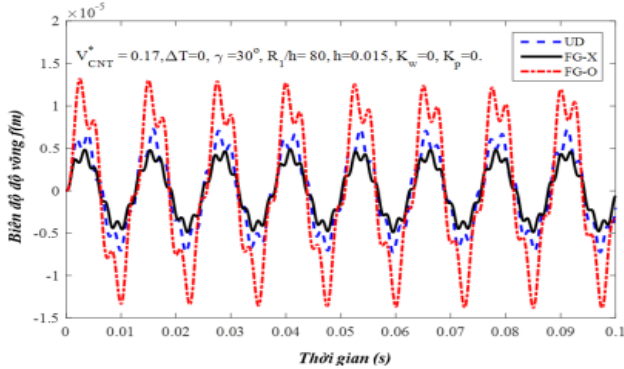
| $n$           | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Tài liệu [63] | 0.8420 | 0.7376 | 0.6362 | 0.5528 | 0.4950 |
| Tài liệu [65] | 0.8431 | 0.7416 | 0.6419 | 0.5590 | 0.5008 |
| Tài liệu [51] | 0.7910 | 0.7284 | 0.6352 | 0.5531 | 0.4949 |
| Luận án       | 0.7894 | 0.7208 | 0.6552 | 0.5925 | 0.5328 |

##### 4.2.2.2. Kết quả tần số riêng

**Bảng 4.19:** Ảnh hưởng của góc bán đỉnh  $\gamma$  lên tần số riêng của vỏ nón cụt FG-CNTRC

| $\gamma$ | UD   | FG-X | FG-O |
|----------|------|------|------|
| 15       | 5721 | 6769 | 4446 |
| 30       | 2205 | 2640 | 1664 |
| 45       | 1358 | 1635 | 1010 |
| 60       | 1039 | 1250 | 772  |

##### 4.2.2.3. Kết quả phân tích đáp ứng động lực học



**Hình 4.16:** Ảnh hưởng của loại phân bố CNT tới đường cong biên độ độ võng và thời gian của vỏ nón cắt FG-CNTRC

### 4.3. Kết luận chương 4

Kết quả phân tích đáp ứng động lực học và dao động của tấm và vỏ FG-CNTRC sử dụng nguyên lý Hamilton với lý thuyết biến dạng cắt hình sin và tính phi tuyến hình học của Von Kármán để thiết lập các phương trình chuyển động. Khảo sát ảnh hưởng các yếu tố hình học và vật liệu tới tần số riêng, mối liên hệ biên độ độ võng-thời gian, biên độ độ võng-tần số.

## KẾT LUẬN

### Những đóng góp của luận án:

- Đề xuất lý thuyết biến dạng cắt hình sin nhằm giảm bớt khối lượng tính toán trong phân tích tấm và vỏ FG-CNTRC nhưng vẫn mô tả mối quan hệ phi tuyến giữa ứng suất tiếp và biến dạng cắt. Các phương trình cân bằng và chuyển động được xây dựng xuất phát từ lý thuyết này cũng như các lý thuyết biến

dạng cắt của Reddy dựa trên nguyên lý công ảo và nguyên lý Hamilton với trường biến dạng phi tuyến von-Kármán.

- Xác định được ba dạng nghiệm của chuyển vị và hàm ứng suất tương ứng với điều kiện biên các cạnh tự đơn, ngàm và các cạnh tựa đơn và ngàm đối xứng cho phân tích tấm, vỏ FG-CNTRC sử dụng phương pháp giải tích.
- Phân tích mất ổn định của tấm, vỏ hai độ cong và vỏ nón cụt FG-CNTRC nhằm xác định giá trị tải trọng tới hạn, mối liên hệ tải trọng-độ võng sau tới hạn sử dụng cả phương pháp giải tích và phương pháp mô phỏng số.
- Xác định tần số riêng, mối liên hệ biên độ độ võng - thời gian, biên độ độ võng-tần số trong phân tích động lực học phi tuyến của tấm, vỏ hai độ cong và vỏ nón cụt FG-CNTRC sử dụng phương pháp giải tích và phương pháp số.

### **Hướng phát triển của luận án:**

- Phân tích bài toán tĩnh và động của tấm, vỏ FG-CNTRC với các phương pháp khác nhau như Navier solution, biến đổi Fourier nhằm xác định dạng nghiệm đóng của phương trình.
- Tối ưu hóa thành phần vật liệu CNT nhằm nâng cao hiệu suất hoạt động cũng như giá trị tải trọng tới hạn, tần số riêng của các kết cấu FG-CNTRC.
- Sử dụng phương pháp thực nghiệm, giải tích, mô phỏng số kết hợp với phương pháp học máy (machine learning) áp dụng trong phân tích cơ học của các kết cấu FG-CNTRC.
- Xây dựng mô hình xác định tính chất vật liệu FG-CNT bằng phương pháp mô phỏng số RVE (Representative Volume Element) kết hợp mô hình mạng trí tuệ nhân tạo.

## DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

- [CT1]. **Pham Dinh Nguyen**, Nguyen Dinh Duc (2024), “A semi-analytical sinusoidal shear deformation theory for nonlinear dynamic response and vibration of CNT–FGM doubly curved shallow shells”, *Acta Mechanica*, DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03824-8>. (Springer, SCI, Nature Index, IF= 2.166).
- [CT2]. **Pham Dinh Nguyen**, George Papazafeiropoulos, Quang-Viet Vu, Nguyen Dinh Duc (2022), “Buckling response of laminated FG-CNT reinforced composite plates: analytical and finite element approach”, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 121, 107368 (Elsevier, SCIE, IF=5.457).
- [CT3]. Nguyen Dinh Duc, Seung-Eock Kim, Duong Tuan Manh, **Pham Dinh Nguyen\*** (2020), “Effect of eccentrically oblique stiffeners and temperature on the nonlinear static and dynamic response of S-FGM cylindrical panels”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 146, pp. 106438 (Elsevier, SCIE, IF=4.442).
- [CT4]. **Pham Dinh Nguyen**, Vu Dinh Quang, Vu Thi Thuy Anh, Nguyen Dinh Duc (2019), “Nonlinear vibration of carbon nanotube reinforced composite truncated conical shells in thermal environment”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 19 (02), pp. 1950158 (World Scientific, SCIE, IF=2.15).
- [CT5]. Nguyen Dinh Duc, Duong Tuan Manh, Nguyen Dinh Khoa, **Pham Dinh Nguyen** (2022), “Mechanical stability of sandwich eccentrically stiffened auxetic truncated conical shells surrounded on elastic foundations”, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 58, pp. 365–382 (Springer, SCIE, IF=1.52).
- [CT6]. Nguyễn Đình Đức, **Phạm Đình Nguyễn\*** (2021), “Tối ưu vị trí gân trong phân tích ổn định của tấm composite nhiều lớp”, *Đã đăng tại tuyển tập hội nghị Hội nghị Khoa học toàn quốc Cơ học Vật rắn lần thứ XV, 6-7/8/2021*.
- [CT7]. **Pham Dinh Nguyen**, George Papazafeiropoulos, Quang-Viet Vu, Nguyen Dinh Duc (2021), “Optimum buckling analysis of laminated composite plates reinforced by multiple stiffeners”, *The*

*6th International Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA 2021).*

- [CT8]. Vu Thi Thuy Anh, Vu Thi Huong, **Pham Dinh Nguyen**, Nguyen Dinh Duc (2021), “Nonlinear dynamic analysis of porous graphene platelet-reinforced composite sandwich shallow spherical shells”, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 57 (5), pp. 609-622 (Springer, SCIE, IF=1.52).
- [CT9]. **Pham Dinh Nguyen**, Quang-Viet Vu, George Papazafeiropoulos, Hoang Thi Thiem, Pham Minh Vuong, Nguyen Dinh Duc (2020), “Optimization of laminated composite plates for maximum biaxial buckling load”, *VNU Journal of Science: Mathematics - Physics*, Vol. 121, DOI: 10.25073/2588-1124/vnumap.4509
- [CT10]. Duong Tuan Manh, Vu Thi Thuy Anh, **Pham Dinh Nguyen**, Nguyen Dinh Duc (2020), “Nonlinear post-buckling of CNTs reinforced sandwich-structured composite annular spherical shells”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 20 (02), pp. 2050018.
- [CT11]. Do Quang Chan, Pham Dinh Nguyen, Vu Dinh Quang, Vu Thi Thuy Anh, **Nguyen Dinh Duc** (2019), “Nonlinear buckling and post-buckling of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite truncated conical shells subjected to axial load”, *Steel and Composite Structures*, Vol. 31 (3), pp .243-259.
- [CT12]. Ngo Dinh Dat, Nguyen Dinh Khoa, **Pham Dinh Nguyen**, Nguyen Dinh Duc (2019), “An analytical solution for nonlinear dynamic response and vibration of FG-CNT reinforced nanocomposite elliptical cylindrical shells resting on elastic foundations”, *ZAMM - Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 100, DOI: 10.1002/zamm.201800238 (WILEY, SCIE, IF= 1.467).
- [CT13]. Nguyen Dinh Khoa, **Pham Dinh Nguyen** (2019), “Analytical investigation on nonlinear dynamic behavior and free vibration analysis of laminated nanocomposite plates”, *Proc ImechE Part C J Mech Eng Sci*, Vol. 233, pp. 6866-6878.
- [CT14]. Nguyen Dinh Duc, **Pham Dinh Nguyen**, Nguyen Huy Cuong, Nguyen Van Sy, Nguyen Dinh Khoa (2018), “An analytical approach on nonlinear mechanical and thermal post-buckling of nanocomposite double-curved shallow shells reinforced by carbon

nanotubes”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 233 (11), pp. 3888-3903. Doi: 10.1177/0954406218802921 (SAGE, SCIE, IF=1.015).

- [CT15]. **Pham Dinh Nguyen**, Quang-Viet Vu, George Papazafeiropoulos, Nguyen Dinh Duc (2024), “A comprehensive investigation on optimum layer thickness and fiber orientations of laminated composite plates against buckling failure under various loading conditions”, *Journal Mechanical Science and Technology*. Accepted.